Quadratische Ergänzung

1 Allgemeine Form der Parabelgleichung

Ist die Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$ bekannt, kann man diese leicht durch Anwenden der ersten oder zweiten binomischen Formel in die allgemeine Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ überführen. Ein Beispiel hilft hier weiter ...

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x+3)^2 + 2 \quad \text{Anwenden der 1. bin. Formel} \\
f(x) &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 + 2 \quad \text{Zusammenfassen} \\
f(x) &= x^2 + 6x + 11 \quad \text{Allgemeine Form}
\end{aligned}
$$

2 Umwandlung allgemeine Form in Scheitelpunktform

Möchte man diesen Prozess in der umgekehrten Richtung durchführen, ist die so genannte *Quadratische Ergänzung* hilfreich. Sie dient also dazu, eine quadratische Funktion in die Scheitelpunktform zu bringen. Dazu muss die Funktion so ergänzt werden, dass man die erste oder zweite binomische Formel anwenden kann. Und so geht's ...

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + 6x + 11 \quad \text{Quadratisch ergänzen} \\
f(x) &= x^2 + 6x + \underbrace{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2}_{0} + 11 \quad \text{Vereinfachen} \\
f(x) &= x^2 + 6x + \underbrace{9 - 9}_{0} + 11 \\
f(x) &= \underbrace{(x^2 + 6x + 9)}_{(x+3)^2} \underbrace{-9 + 11}_{2} \quad \text{Anwenden der 1. bin. Formel und Zusammenfassen} \\
f(x) &= (x+3)^2 + 2 \quad \text{Scheitelpunktform}
\end{aligned}
$$

Der Scheitelpunkt ist $S(-3 \mid 2)$.

3 Übungen: Bestimme den Scheitelpunkt

a) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

b) $f(x) = x^2 - 5x + \frac{9}{4}$

c) $f(x) = -x^2 + 4x + 10$

d) $f(x) = 2x^2 + 8x - 6$

e) $f(x) = -2x^2 + 4x - 18$