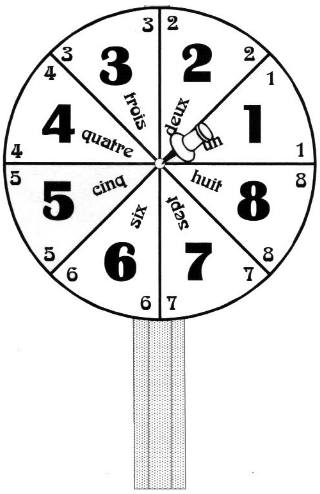
Grundlagen der Stochastik

Teil 1 – Strichlisten, absolute und relative Häufigkeit



Wenn du dieses Glücksrad drehst, dann hältst du die **Häufigkeit** der verschiedenen **Ereignisse** (hier sind es die Zahlen 1, 2, ..., 7, 8) in einer Tabelle oder **Strichliste** fest.

Ereignis	Striche
1	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 II
2	𝍸 𝍸 𝍸 IIII
3	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 IIII
4	𝍸 𝍸 𝍸 II
5	𝍸 𝍸 𝍸 III
6	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 III
7	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I
8	𝍸 𝍸 𝍸 I

Die **Anzahl**, mit der ein bestimmtes Ereignis eintritt, nennt man **absolute Häufigkeit**.

Den **Anteil** bestimmter Ereignisse an der Gesamtzahl der Versuche nennt man **relative Häufigkeit**. Man kann sie als Bruch, Dezimalbruch oder Prozentsatz angeben.

$$\textit{relative Häufigkeit} = \frac{\textit{absolute Häufigkeit}}{\textit{Gesamtzahl}}$$

Ereignis	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit als Bruch	Relative Häufigkeit als Dezimalbruch	Relative Häufigkeit als Prozentsatz
1	22	22/160	0,14	14%
2	19	19/160	0,12	12%
3	24	24/160	0,15	15%
4	17	17/160	0,11	11%
5	18	18/160	0,11	11%
6	23	23/160	0,14	14%
7	21	21/160	0,13	13%
8	16	16/160	0,1	10%

Ob richtig gerechnet wurde, überprüft die **Summenprobe**: 14% + 12% + 15% + 11% + 11% + 14% + 13% + 10% = 100%.

Der größte Wert (hier 24) heißt **Maximum**; der kleinste (hier 16) **Minimum**.

Der Abstand zwischen dem Maximum und dem Minimum ist die **Spannweite**. Man berechnet sie aus der Differenz der beiden Werte. Hier ist die Spannweite also 24 – 16 = 8.

Grundlagen der Stochastik

Teil 2 – Zufall und Wahrscheinlichkeit

Ein Ereignis ist immer dann **zufällig**, wenn das Ergebnis (der Ausfall eines Zufallsexperiments) nicht vorher gesagt werden kann.

Wenn bei Zufallsversuchen alle Ausfälle die gleichen Chance haben einzutreffen (so wie z. B. beim Würfeln mit einem Spielwürfel) dann gilt für die **Wahrscheinlichkeit *p***:

$$p = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ausfälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Ausfälle}}$$

Die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel z. B. eine gerade Zahl zu erwürfeln, beträgt ½. Das berechnet sich so:

Die Ergebnismenge für alle günstigen Ausfälle ist $\{2; 4; 6\}$, sie enthält also 3 Elemente. Für alle möglichen Ausfälle ist sie $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; sie enthält 6 Elemente.

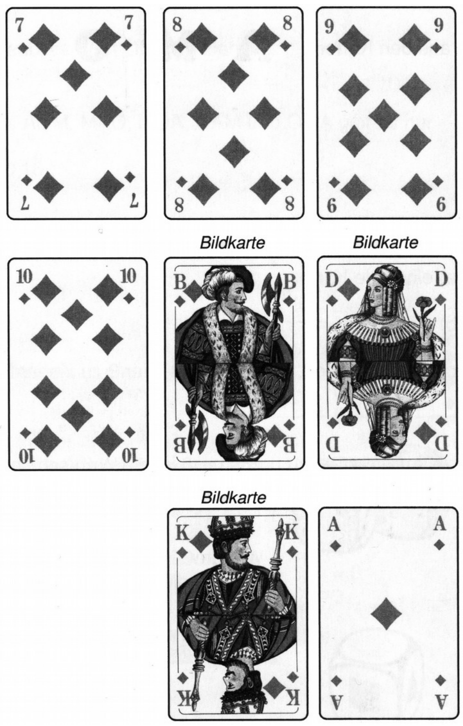
Also ist die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Wenn man Zufallsversuche lange genug durchführt, kann man erwarten, dass sich die **relativen Häufigkeiten** eines Ausfalls der **Wahrscheinlichkeit** dieses Ausfalls in etwa nähern.

Die relative Häufigkeit eines Ausfalls kann deshalb näherungsweise als ein Maß für die Wahrscheinlichkeit genommen werden, wenn die Zufallsversuche lang genug durchgeführt werden.

Ein Beispiel soll das verdeutlichen.

Du nimmst aus einem Kartenspiel die Karten heraus, die rechts zu sehen sind. Schätze wie oft du bei 48 Ziehungen eine Bildkarte ziehst. Theoretisch müsstest du bei 48 Ziehungen bei 48 Versuchen 18-mal eine Bildkarte gezogen haben, denn die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall „Ziehen einer Bildkarte“ beträgt $p = \frac{3}{8}$ und $48 \cdot \frac{3}{8} = 18$.



Jetzt sollst du untersuchen, ob du gut geschätzt hast. Du ziehst 48-mal eine Karte und hältst das Ergebnis in einer Tabelle als Strichliste fest. Sie könnte so aussehen:

Bildkarte	Zahlenkarte
𝍸 𝍸 𝍸 ||||	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||

Die Strichliste stimmt mit deinen Überlegungen gut überein. Wenn das nicht immer so hinhaut, liegt es wie so oft am Zufall.

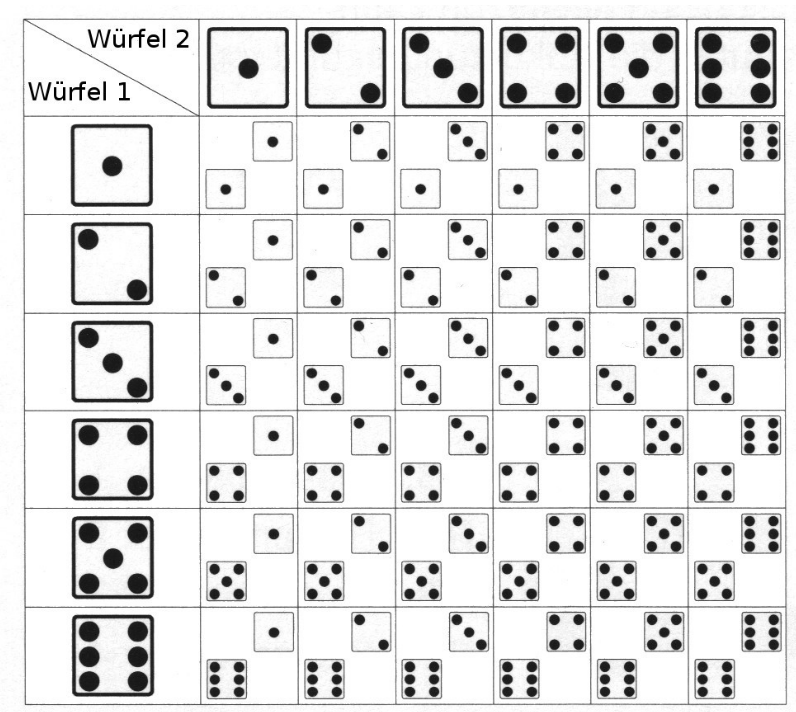
Grundlagen der Stochastik

Teil 3 – Mehrstufige Zufallsversuche, Baumdiagramm, Permutationen

Wird ein Zufallsversuch mehrmals hintereinander ausgeführt, so spricht man von einem **mehrstufigen Zufallsversuch**.

Beispiel: Zwei Würfel werden geworfen.

Die Übersichtstabelle zeigt alle möglichen Ausfälle.



Nun lässt sich die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis leicht berechnen.

a) „die Augensumme ist 7“

$$p=\frac{6}{36}=0{,}17=17\,\%$$

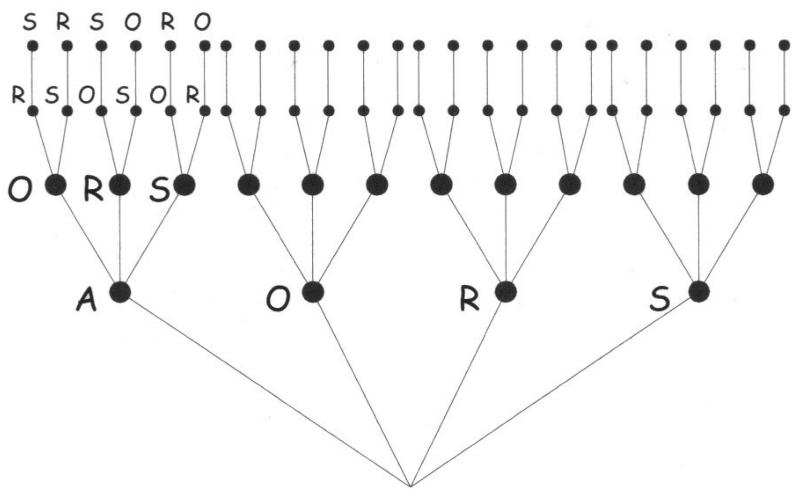
b) „die Augensumme ist 10“

$$p=\frac{3}{36}=0{,}083=8{,}3\%$$

Baumdiagramm

Um bei mehrstufigen Zufallsversuchen alle möglichen Ereignisse zu finden, ist manchmal ein **Baumdiagramm** ganz hilfreich.

In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen kann man die Buchstaben A, O, R, S aufschreiben? Das Baumdiagramm soll bei der Beantwortung dieser Frage helfen.



In der ersten Stufe gibt es 4 Möglichkeiten einen Buchstaben zu wählen. In der zweiten Stufe kann man jeweils einen aus 3 verschiedenen Buchstaben auswählen, danach jeweils einen aus 2 und danach noch jeweils einen. Die Gesamtzahl aller Möglichkeiten ist also $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (man schreibt kurz $4!$: sprich „4 Fakultät“).

Permutationen

n verschiedene Dinge kann man in $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ (sprich „n Fakultät“) verschiedenen Reihenfolgen aufschreiben.

Beispiel

Wie lange brauchst du 9 verschiedene Bücher in allen möglichen Kombinationen anzuordnen, wenn du für jede Umstellung 30 Sekunden benötigst?

Zuerst musst du berechnen wie viele Umstellungen es überhaupt gibt.

$9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$ (Möglichkeiten)

$362880 \cdot 30 = 10886400$ (Sekunden)

Das sind immerhin 3024 Stunden oder 126 Tage!

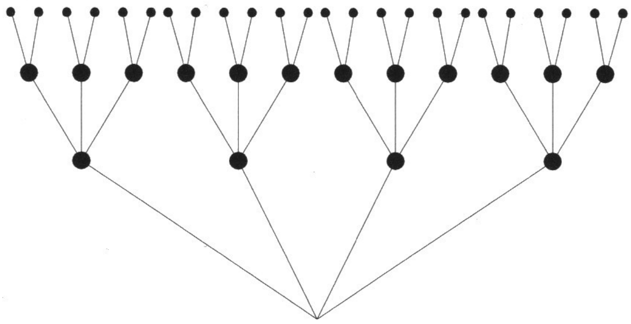
Grundlagen der Stochastik

Teil 4 – Produktregel, Pfadregel, Summenregel

Hat man *a* Möglichkeiten, den 1. Platz zu besetzen, *b* Möglichkeiten den 2. Platz zu besetzen und *c* Möglichkeiten, den 3. Platz zu besetzen, dann hat man insgesamt $a \cdot b \cdot c$ Möglichkeiten für die Belegung aller Plätze. Das nennt man die **Produktregel der Kombinatorik**.

Dazu ein Beispiel.

Im Baumdiagramm rechts hat man 4 Möglichkeiten, den 1. Platz zu besetzen, jeweils 3 Möglichkeiten, den 2. Platz zu besetzen und dann jeweils 2 Möglichkeiten den 3. Platz zu besetzen. Es ist a = 4; b = 3; c = 2. Es gibt also $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten.



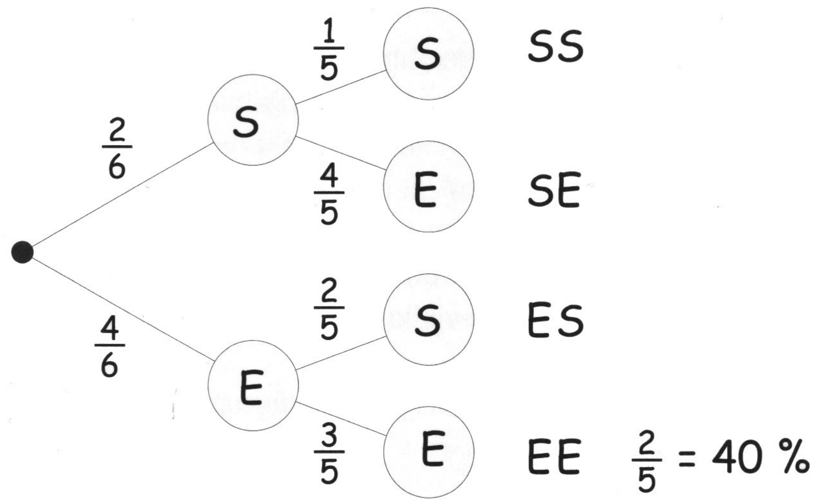
Pfadregel

Man erhält die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades multipliziert.

Ein Beispiel macht klar worum es geht.

Der Zollbeamte Herlock Sholmes weiß genau, dass unter der Reisegruppe von sechs Personen zwei Leute sind, die Zigaretten und Alkohol in nicht unerheblichem Maße geschmuggelt haben.Er will aber nicht alle sechs durchchecken, sondern greift sich lediglich zwei Personen aus der Gruppe heraus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt er keinen Schmuggler?

Ein Baumdiagramm und die Pfadregel helfen da weiter. S steht für Schmuggler und E für Ehrliche.



Im Baumdiagramm beschriftet man die Pfade (Äste) mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Um herauszufinden, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei der Stichprobe kein Schmuggler dabei ist, muss der unterste Pfad betrachtet werden.

Die Pfadregel besagt: Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis EE ist $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 40\,\%$.

Summenregel

Besteht ein Ereignis aus mehreren Ergebnissen, so berechnet man für jedes zugehörige Ergebnis die Wahrscheinlichkeit nach der Pfadregel und addiert diese Wahrscheinlichkeiten.

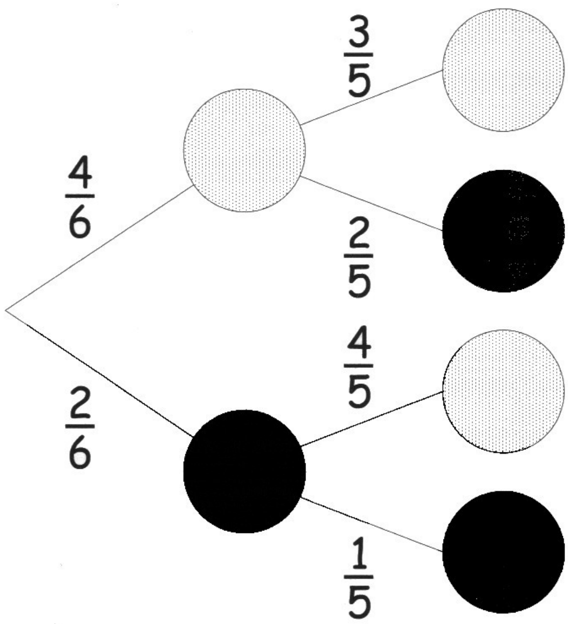
Auch hier hilft ein Beispiel zum Verständnis.

In einem Behälter befinden sich 6 Kugeln, 4 davon sind weiß, 2 davon sind schwarz. Nun werden nacheinander zwei Kugeln gezogen, ohne dass die erste wieder zurück gelegt wird.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Kugel schwarz ist?

Als visuelle Hilfe dient auch hier wieder ein Baumdiagramm. Nach dem Zeichnen des Baumdiagramms beschriftet man die Äste mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten und berechnet dann für jedes Ereignis mit der Pfadregel die Wahrscheinlichkeit.

(W: weiße Kugel; S: schwarze Kugel)



$p(WW)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}=40\%$

$p(WS)=\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}=26{,}7\%$

$p(SW)=\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{15}=26{,}7\%$

$p(SS)=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}=6{,}7\%$

Die unteren drei Pfade sind für die Beantwortung der Frage relevant, denn hier kommt jeweils mindestens einmal eine schwarze Kugel vor. Die Gesamtwahrscheinlichkeit mindestens eine schwarze Kugel zu ziehen ist also die Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten:

$p(WS)+p(SW)+p(SS)=26{,}7\% + 26{,}7 \ +6{,}7\% = 60\ \%$

P.S. Das hätte man in diesem Fall auch schneller berechnen können, da die Gesamtwahrscheinlichkeit für alle Ausfälle natürlich 100 % betragen muss.