Wurzelgleichungen

1.1 Was ist eine Wurzelgleichung?

Beispiel für eine Wurzelgleichung Eine Wurzelgleichung ist eine Gleichung bei der in mindestens einem Radikanten (Term unter der Wurzel) die Unbekannte x vorkommt.	$\sqrt{x+3}=2$
Gegenbeispiel In dieser Gleichung kommt zwar eine Wurzel vor, aber die Unbekannte x kommt nicht im Radikanten der Wurzel vor. Somit ist die Gleichung <u>keine</u> Wurzelgleichung.	$\sqrt{4}+x=3$

1.2 Lösen einer Wurzelgleichung

Schritt 1: Potenzieren Um eine Wurzelgleichung zu lösen, potenziert man beide Seiten der Gleichung mit dem Wurzelexponenten, d.h. in unserem Fall mit der Zahl 2.	$\sqrt{x}=2 \;\; \vert\uparrow^2$
Schritt 2: Vereinfachen Auf der linken Seite heben sich Radizieren (Wurzelziehen) und Potenzieren gegenseitig auf. Auf der rechten Seite ergibt $2^2 = 4$	$(\sqrt{x})^2=2^2$
3. Lösung Die Lösung der Wurzelgleichung lautet also $x = 4$.	$x=4$

1.3 Zuerst die Wurzel isolieren

Meist steht die Wurzel jedoch nicht alleine auf einer Seite, sondern in einer Summe oder Differenz. Dann muss man die Wurzel vor dem Potenzieren zuerst isolieren, d.h. man muss dafür sorgen, dass sie alleine auf einer Seite steht.	$\sqrt{x}+3=5 \;\; \vert-3$ $\sqrt{x}=2 \;\; \vert\uparrow^2$ $x=4$

1.4 Warum die Probe immer nötig ist

Beispiel Wir haben gesagt, dass man Wurzelgleichungen durch Potenzieren löst. Wir lösen die Wurzelgleichung und erhalten als Ergebnis 14.	$\sqrt{x+2}=-4 \;\; \vert\uparrow^2$ $x+2=16 \;\; \vert-2$ $x=14$
Probe machen Nun machen wir die Probe, d.h. wir setzen die Lösung (die Zahl 14) in die ursprüngliche Gleichung ein, und überprüfen ob sich eine wahre oder eine falsche Aussage ergibt. Wir stellen fest, dass die Zahl 14 keine Lösung ist. Wie kommt das?	$\sqrt{14+2}=4$ $4=-4$ Falsche Aussage!
Erklärung Die falsche Lösung entstand, weil das Potenzieren <u>keine</u> Äquivalenzumformung ist. Beim Potenzieren können Scheinlösungen hinzukommen. Weil man zum Lösen von Wurzelgleichungen stets Potenzieren muss, muss man auch immer die Probe machen.	

2.1 Eine Quadratwurzel

1. Wurzel isolieren In der gegebenen Gleichung muss zuerst die Wurzel isoliert werden.	$\sqrt{x+2}-3=0 \quad \vert +3$
2. Beide Seiten quadrieren Nun ist die Wurzel isoliert. Jetzt können beide Seiten quadriert werden.	$\sqrt{x+2}=3 \quad \vert \uparrow^2$
3. Vereinfachen Jetzt ist die Wurzel verschwunden. Um die Formel nach x umzustellen, muß auf beiden Seiten 2 subtrahiert werden.	$x+2=9 \quad \vert -2$
4. Ergebnis Wir erhalten das Ergebnis.	$x=7$
5. Probe Nun müssen wir noch die Probe machen, indem wir das Ergebnis in die ursprüngliche Wurzelgleichung einsetzen.	$\sqrt{7+2}-3=0$ $0=0$ Wahre Aussage!
6. Lösungsmenge Weil die Probe eine wahre Aussage ergibt, gehört die Zahl 7 zur Lösungsmenge.	$L=\{7\}$

2.1 Zwei Quadratwurzeln

1. Gegebene Gleichung quadrieren Dieser Typ von Wurzelgleichung ist sehr leicht zu lösen. Man potenziert beide Seiten mit dem Wurzelexponenten, d.h. wir müssen in diesem Fall beide Seiten mit 2 potenzieren, d.h. Wir müssen beide Seiten quadrieren.	$\sqrt{2x+2}=\sqrt{3x-1} \quad \vert \uparrow^2$
2. Umformung Die Wurzeln sind jetzt verschwunden. Nun müssen wir nur noch zwei einfache Termumformungen vornehmen. Zuerst ziehen wir 2 x von beiden Seiten ab. Dadurch sind alle x auf der rechten Seite der Gleichung. Als nächstes addieren wir auf beiden Seiten die Zahl 1.	$2x+2=3x-1 \quad \vert -2x$ $2=x-1 \quad \vert +1$
3. Ergebnis	$x=3$
4. Probe Nun müssen wir nur noch die Probe machen, indem wir $x = 3$ in die ursprüngliche Gleichung einsetzen. Die Probe liefert eine wahre Aussage, also ist $x = 3$ eine Lösung der Wurzelgleichung.	$\sqrt{2\cdot 3+2}=\sqrt{3\cdot 3-1}$ $\sqrt{8}=\sqrt{8}$ Wahre Aussage!
5. Lösungsmenge	$L=\{3\}$

2.3 Verschachtelte Wurzeln

1. Wurzel isolieren In der gegebenen Gleichung muß zuerst die Wurzel isoliert werden.	$\sqrt{6-\sqrt{x+1}}-2=0 \quad \vert +2$
2. Beide Seiten quadrieren Nun ist die Wurzel isoliert. Jetzt können beide Seiten quadriert werden.	$\sqrt{6-\sqrt{x+1}}=2 \quad \vert \uparrow^2$
3. Nochmal Wurzel isolieren	$6-\sqrt{x+1}=4$

4. Beide Seiten quadrieren Nun ist die zweite Wurzel isoliert, und wir müssen nochmals quadrieren.	$2=\sqrt{x+1} \quad \vert\uparrow^2$
5. Vereinfachen Jetzt sind beide Wurzeln verschwunden, und wir können die Gleichung nach *x* umstellen.	$4=x+1$
6. Ergebnis	$x=3$
7. Probe Nun müssen wir noch die Probe machen, indem wir das Ergebnis in die ursprüngliche Wurzelgleichung einsetzen.	$\sqrt{6-\sqrt{3+1}}-2=0$ $0=0$ Wahre Aussage!
8. Lösungsmenge	$L=\{3\}$

Übungen zu einfachen Wurzelgleichung

1. $\sqrt{x+1}+2=4$
2. $\sqrt[3]{x-1}+10=12$
3. $\sqrt[4]{x-1}=2$
4. $\sqrt{x+4}=4$
5. $\sqrt{x+30}=6\sqrt{x-5}$
6. $\sqrt[3]{x+200}=2\sqrt[3]{x+11}$
7. $4\sqrt{x-20}=\sqrt{x-5}$
8. $2\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{x+190}$
9. $\sqrt{x}=\sqrt{x+8}-2$
10. $\sqrt{x+7}=\sqrt{x+2}-1$
11. $\sqrt{x-4}-\sqrt{x+11}+3=0$
12. $\sqrt{x-10}+\sqrt{x+10}=10$

3.1 Wurzelgleichung, die zu quadratischen Gleichungen führen

1. Wie üblich wird zuerst die Wurzel isoliert.	$\sqrt{2x-1}-x=0$
2. Jetzt beide Seiten quadrieren.	$\sqrt{2x-1}=x \mid \uparrow^2$
3. Umordnen: Nun alle Summanden auf eine Seite bringen.	$2x-1=x^2$
4. Wir erkennen, dass eine quadratische Gleichung vorliegt, und zwar in Form der 2. Binomischen Formel.	$x^2-2x+1=0$
5. Produktform: Wir können daher die quadratische Gleichung als Produkt schreiben. Dies hat den Vorteil, dass wir die Lösung sofort ablesen können, denn ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist (also eine der Klammern).	$(x-1)^2=0$
6. Ergebnis.	$x=1$
7. Probe.	$\sqrt{2\cdot 1-1}-1=0$ $0=0$ W. A.
8. Lösungsmenge.	$L=\{1\}$

3.2 Wurzelgleichung mit zwei Quadratwurzeln

1. Wurzel isolieren.	$\sqrt{x+7}-\sqrt{x+2}-1=0 \mid +\sqrt{x+2}$
2. Gleichung quadrieren. Achtung: Auf der linken Seite nicht nur die Wurzel quadrieren (häufiger Fehler) sondern die gesamte linke Seite.	$\sqrt{x+7}-1=\sqrt{x+2} \mid \uparrow^2$
3. Vereinfachen: Auf der rechten Seite heben sich Wurzelziehen und Potenzieren auf. Die linke Seite ist ein 2. Binom, schreibe es als Summe.	$(\sqrt{x+7}-1)^2=(\sqrt{x+2})^2$
4. Wurzel isolieren: Nachdem wir auf der linken Seite das Binom als Summe geschrieben haben, fangen wir an, die verbleibende Wurzel zu isolieren: Dazu subtrahieren wir auf beiden Seiten *x* und 8:	$x+7-2\sqrt{x+7}+1=x+2 \mid -x-8$
5. Durch Division mit –2 wird die Wurzel vollständig isoliert.	$-2\sqrt{x+7}=-6 \mid :(-2)$
6. Gleichung nochmal potenzieren: Um die isolierte Wurzel zu beseitigen müssen wir quadrieren:	$\sqrt{x+7}=3 \mid \uparrow^2$
7. Umformen: Auf der linken Seite heben sich Quadrieren und Potenzieren auf. Nun 7 auf beiden Seiten subtrahieren.	$x+7=9$
8. Ergebnis.	$x=2$
9. Probe.	$\sqrt{2+7}-\sqrt{2+2}-1=0$ $0=0$ W. A.
10. Lösungsmenge.	$L=\{2\}$

3.3 Zwei verschachtelte Quadratwurzeln

1. Die Wurzel ist bereits isoliert, und kann daher sofort quadriert werden.	$\sqrt{2x+\sqrt{x+3}}=2 \mid \uparrow^2$
2. Dadurch ist die erste Wurzel bereits verschwunden. Nun ziehen wir von beiden Seiten $2x$ ab, damit die verbleibende Wurzel ebenfalls isoliert wird.	$2x+\sqrt{x+3}=4 \mid -2x$
3. Nun ist die verbleibende Wurzel isoliert, und kann quadriert werden.	$\sqrt{x+3}=4-2x \mid \uparrow^2$
4. Die rechte Seite kann man mit der 2.Binomischen Formel vereinfachen.	$x+3=(4-2x)^2$
5. Die rechte Seite der Gleichung müssen wir noch vereinfachen: Wir bringen alle Summanden auf die linke Seite.	$x+3=16-16x+4x^2 \mid -4x^2+16x-16$
6. Es liegt eine quadratische Gleichung in allgemeiner Form vor. Diese muss mit einem beliebigen Lösungsverfahren gelöst werden.	$-4x+17x-13=0$
7. Ergebnis.	$x=1 \vee x=\frac{13}{4}$
8. Probe für $x=1$.	$\sqrt{2\cdot 1+\sqrt{1+3}}=2$ $2=2$ W. A.
9. Probe für $x=\frac{13}{4}$	$\sqrt{2\cdot\frac{13}{4}+\sqrt{\frac{13}{4}+3}}=2$ $3=2$ Falsche Aussage
10. Lösungsmenge.	$L=\{1\}$

Übungen zu schwierigen Wurzelgleichung

1. $\sqrt{x+1}=x-1$
2. $\sqrt{x+4}+2=x$
3. $\sqrt{x+2}\sqrt{x+7}=6$
4. $\sqrt[3]{x-5}\sqrt[3]{x+2}=2$
5. $\sqrt{x+20}=\sqrt{x}+\sqrt{x-12}$
6. $\sqrt{13x+12}=2\sqrt{x-3}+3\sqrt{x}$
7. $\sqrt{2x+\sqrt{4x-3}}=3$
8. $\sqrt{x+\sqrt{20x+1}}=\sqrt{2x+5}$
9. $2\sqrt{2x+2}=\sqrt{x+8}+x$