Posten 6

Sind Massen immer gleich massiv?

Sozialform	Zweier- oder Dreiergruppe
Bearbeitungszeit	45 Minuten
Voraussetzung	Posten 1 „Einsteins Postulate“
	Posten 3 „Ist Zeit relativ?“
	Posten 5 „$E=mc^2$“

6.1 Einleitung

Im Posten 3 „Ist Zeit relativ?“ haben Sie gesehen, dass die Zeit vom Bezugssystem des Beobachters abhängt. Vielleicht haben Sie auch schon im Posten 4 gesehen, dass eine Länge ebenfalls vom Bezugssystem abhängt. Wie sieht es nun mit der Masse aus? Sind sie ebenfalls relativ, also vom Bezugssystem eines Beobachters abhängig?

Ziel dieses Postens ist es zu lernen, wie die Masse eines Objektes zunimmt, wenn es sich sehr schnell bewegt (und somit an kinetischer Energie gewinnt). Sie werden auch erfahren, woher die zusätzliche Masse kommt, und wie man sie physikalisch interpretieren kann. Sie sollen ebenfalls mit der Einheit „Elektronenvolt“ vertraut werden und sie als nützliche Einheit verwenden können.

6.2 Arbeitsauftrag

1) Lesen Sie aufmerksam den folgenden Text durch. Ihnen wird dort erklärt, dass sich sehr schnell bewegende Objekte an Masse zunehmen.

2) Erstellen Sie die geforderte Excel-Datei, und lösen Sie die gestellten Aufgaben.

3) Lesen Sie die Abschnitte zum tieferen Verständnis der Massenzunahme und der Einheit des Elektronenvolts. Die darin gestellten Aufgaben können Sie im Gespräch in Ihrer Gruppe ausdiskutieren.

6.3 Auto prallt in Mauer

Stellen wir uns ein Auto vor, das in eine Mauer rast (siehe Abb. 1). Je höher seine Geschwindigkeit, oder je höher seine Masse, desto tiefer wird es in die Mauer eindringen. Die Eindringtiefe in die Mauer (bzw. die *Wucht* des Autos) ist also ein *Mass für den Impuls* des Autos.

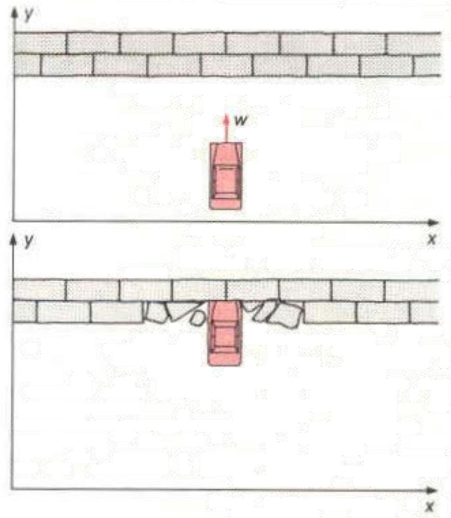

Abb. 1: Messung des Impulses eines Autos

Stellen wir uns nun einen sehr schnell bewegten Beobachter vor, der in x-Richtung (parallel zur Wand) das Auto beobachtet (siehe Abb. 2). Das Auto rast also, aus Sicht des Beobachters, parallel zur Wand auf ihn zu, und mit sehr kleiner Geschwindigkeit gegen die Wand.

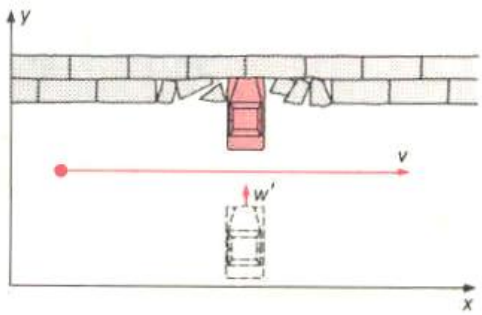

Abb. 2: Schnell bewegter Beobachter sieht langsameres Auto.

Bemerkung (für diejenigen, die sich schon mit der Längenkontraktion befasst haben): Die kleine Geschwindigkeit w des Autos gegen die Wand ist so klein im Vergleich zur Geschwindigkeit v des Beobachters, dass die Längenkontraktion in y-Richtung (also diejenige der Eindringtiefe in die Wand) vernachlässigt werden kann. Die Längenkontraktion geschieht also in x-Richtung.

Was stellt der Beobachter fest? Er beobachtet die Armbanduhr des Autofahrers, und stellt fest, dass sie (aufgrund der Zeitdilatation) langsamer läuft. Für die Strecke bis zur Wand benötigt das Auto also aus Sicht des Beobachters eine längere Zeit, deshalb misst der Beobachter eine kleinere Geschwindigkeit für das Auto (denn die Geschwindigkeit des Autos ist $\Delta y/\Delta t$, und Δt wird grösser!). Er sieht also, wie ein langsames Auto gegen die Wand kriecht, und dort ein erstaunlich tiefes Loch einschlägt! Denn die Eindringtiefe in die Wand ist in beiden Bezugssystemen gleich (der Beobachter und der Autofahrer messen dieselbe Eindringtiefe). Der Beobachter denkt also, dass das Auto aufgrund der riesigen Wucht und kleiner Geschwindigkeit eine riesige Masse haben muss!

Da die Eindringtiefe in beiden Fällen gleich ist, heisst das, dass der Impuls also in beiden Inertialsystemen derselbe ist. Wenn man das erklären will, so folgt gezwungenermassen, dass zwar die Geschwindigkeit des Autos verringert ist, aber seine Masse erhöht wurde. Nur so sind die beiden Impulse (und somit die Wucht in beide Wände) gleich.
Dies ist natürlich auch vom Bezugssystem des Beobachters abhängig: Je schneller der Beobachter am Auto vorbeifliegt (und somit je schneller das Auto am Beobachter vorbeifährt!), desto langsamer fährt für ihn das Auto gegen die Wand, und desto höher muss also die Masse des Autos sein.

Zusammengefasst:
Ein Auto mit bestimmtem Impuls schlägt mit bestimmter Wucht in eine Wand ein. Ein (sehr schnell!) parallel zur Wand bewegter Beobachter sieht das Auto aufgrund der Zeitdilatation mit langsamerer Geschwindigkeit kriechen, stellt aber dieselbe Eindringtiefe (also denselben Impuls) fest. Da der Impuls derselbe ist, heißt das (bei kleinerer Geschwindigkeit), dass die Masse des beobachteten Autos höher ist.

Aus der Zeitdilatation folgt also:

„Bewegte Objekte haben eine erhöhte Masse.“

6.4 Formale Berechnung

Nennen wir die Masse wie sie in ihrem Ruhesystem gemessen wird m_0, und wie sie ein dazu bewegter Beobachter misst m_{rel}. Die Transversalgeschwindigkeit des Autos zur Wand wie sie der Autofahrer misst sei w, und wie sie der Beobachter misst sei w'. Der Beobachter bewegt sich mit der Geschwindigkeit v bezüglich des Autos.

Um die Formel für die geschwindigkeitsabhängige Masse (manchmal auch „relativistische Masse oder dynamische Masse genannt) herzuleiten, stellen wir die beiden Impulse gleich. Dann drücken wir die Geschwindigkeit w' in Abhängigkeit von w dar, wobei wir die Zeitdilatation berücksichtigen:

$$p' = p \quad \Rightarrow \quad m_{rel} \cdot w' = m_0 \cdot w \quad \Rightarrow \quad m_{rel} \cdot w \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_0 \cdot w \quad \Rightarrow \quad \mathrm{m}_{rel} = \frac{\mathrm{m}_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}}$$

Obschon dieses Resultat für einen Spezialfall hergeleitet wurde, kann man zeigen, dass es auch allgemein gilt.

Relativistische Masse: $$\mathrm{m}_{rel} = \frac{\mathrm{m}_0}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}} = \gamma m_0$$

m_0 ist dabei die Masse des Objektes in seinem Ruhesystem, seine Ruhemasse. Das Objekt bewegt sich mit der Geschwindigkeit ***v*** bezüglich des Beobachters, der die Masse ***m_{rel}*** misst.

Für einen Beobachter ist die Masse eines relativ zu ihm bewegten Körpers um den Faktor γ grösser als für einen Beobachter, in dessen System der Körper ruht.

„Bewegte Objekte haben eine erhöhte Masse.“

Aufgabe 1:
a) In Teilchenbeschleunigern werden Elektronen auf eine Geschwindigkeit von über 0,999 c beschleunigt. Wie massiv werden sie, aus Sicht der ruhenden Physikerin im Labor? Die Ruhemasse des Elektrons ist $m_e = 9{,}109... \cdot 10^{-31}$ kg.

b) Auf welche Geschwindigkeit müsste man einen (beliebigen) Körper beschleunigen, damit seine beobachtete Masse um einen Millionstel der Ruhemasse zunimmt?

Aufgabe 2:
a) Ein Raumschiff (1.0 Megatonne Ruhemasse) fliegt mit 0.5 c an einem ruhenden Beobachter vorbei. Welche Masse würde der Beobachter für das Raumschiff messen?

b) Ein Düsenjet verfolgt dasselbe Raumschiff, aus Sicht des Pilots „flüchtet" das Raumschiff mit der Geschwindigkeit 0.4 c. Welche Masse würde der Pilot des Düsenjets für das Raumschiff messen?

c) Messen also der ruhende Beobachter und der verfolgende Pilot dieselbe Masse für *dasselbe Raumschiff*? Oder doch nicht? Begründen Sie ihre Antwort!

Aufgabe 3:
Erstellen Sie (mit der Formel für die relativistische Masse) eine Excel-Datei, die folgendes berechnen kann:

Input: Geschwindigkeit v des bewegten Objekts, in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit

Output: Faktor, der die Massenzunahme des bewegten Objekts angibt (m_{rel}/m_0)

Falls Sie nicht sicher sind, ob Ihre Formel stimmt, rufen Sie Ihren Lehrer / Ihre Lehrerin, oder einen Kollegen, der diesen Posten schon gemacht hat! So ist sichergestellt, dass Sie nicht mit der falschen Formel weiterrechnen.

a) Machen Sie eine Tabelle mit verschiedenen Geschwindigkeiten (die kleiner als c sind!), und berechnen sie die entsprechenden Massenzunahmen. Wie verhält es sich für eine Geschwindigkeit, die gegen die Lichtgeschwindigkeit geht?

b) Finden Sie durch Ausprobieren heraus: Auf welche Geschwindigkeit müsste man einen Körper beschleunigen, damit seine Masse um 1/1000 der Ruhemasse zunimmt (der Faktor also 1,001 wird)? Und wieviel, um die Masse zu verdoppeln, und zu vertausendfachen? Spielen Sie ein bisschen mit Ihrer Datei herum.

c) Was gibt Ihnen ihre Rechnung heraus, wenn Sie die Lichtgeschwindigkeit c eingeben? Was ist wohl der physikalische Grund dafür? Was beobachten sie für Geschwindigkeiten, die sehr nahe an c sind? Welche Masse hätte ein Teilchen, das mit Lichtgeschwindigkeit fliegt?

d) Erzeugen Sie einen Graphen, der die Massenzunahme in Abhängigkeit der Geschwindigkeit des Objektes darstellt. Machen sie Graphen für verschiedene Abschnitte: $v = 0 – 0{,}5\,c$; $v = 0 – 0{,}9\,c$; $v = 0 – 0{,}9999\,c$.

6.5 Experimentelle Bestätigung

Tatsächlich wurde diese Massenzunahme schon mehrfach experimentell bestätigt, indem verschiedene Teilchen (Elektronen, Protonen etc.) in einem Teilchenbeschleuniger beschleunigt wurden. In der Abb. 3 sind Messergebnisse aus den Jahren 1909 bis 1924 dargestellt.

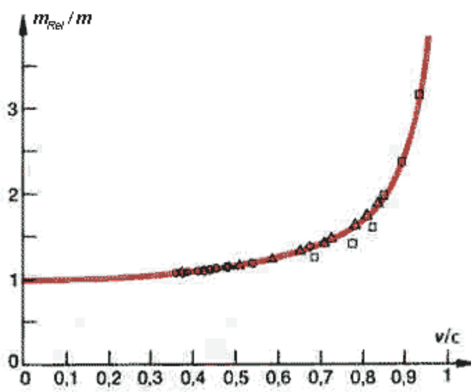

Abb. 3: Experimentelle Überprüfung

Aufgabe 4:
Vergleichen Sie Abb. 3 mit ihrem eigenen Graphen, den Sie mit Excel erstellt haben.

6.6 Woher kommt die zusätzliche Masse?

Aufgabe 5:
Bevor Sie weiterlesen: Machen Sie sich eigene Gedanken darüber, woher die zusätzliche Masse kommen könnte, die ein beschleunigter Körper gewinnt (aus Sicht eines ruhenden Beobachters). Denken Sie dabei an den Posten 5 „$E=mc^2$“, also an die Äquivalenz von Energie und Masse.

Da Sie den Posten über Einsteins berühmteste Formel „$E=mc^2$“ schon studiert haben, wissen Sie die Antwort eigentlich schon. Die Formel besagt, dass Energie und Masse *äquivalent*, also gleichwertig sind. Anstatt die Masse eines Körpers in Kilogramm anzugeben, kann man sie auch in „Energie durch c^2“ angeben (wobei die Energie gemeint ist, die in den Atomen des Körpers gespeichert ist). Ebenso kann man auch die Energie einer Batterie in „Masse mal c^2“ anstatt Joule angeben.

Zum Beispiel entstehen bei der Kernspaltung zwei Atome, die zusammen leichter sind als das ursprüngliche, gespaltene Atom. Die Massendifferenz wurde in Energie umgewandelt. Was ist nun mit einem Körper, der beschleunigt wird? Dieser nimmt an kinetischer Energie zu. Und das ist – wegen der Äquivalenz von Energie und Masse – gleichbedeutend damit, dass seine Masse zunimmt!

„Die Massenzunahme eines beschleunigten Körpers entspricht der kinetischen Energie.“

Man muss an dieser Stelle also aufpassen:
Die Massenzunahme kommt eigentlich nicht wegen der *Geschwindigkeits*zunahme, sondern wegen der Zunahme an *kinetischer Energie*! Diesen kleinen, aber feinen Unterschied macht folgendes Beispiel deutlich (Abb. 4):

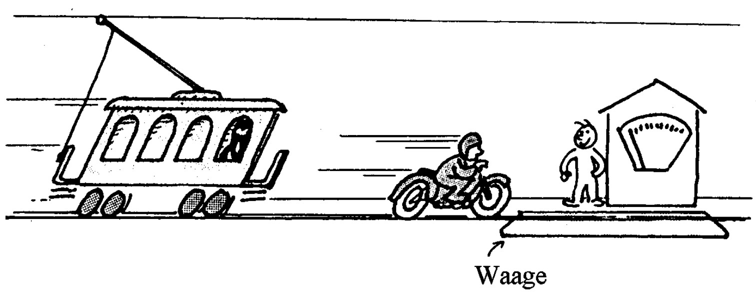

Abb. 4: Strassenbahn und Motorrad werden gewogen.

Sowohl die Strassenbahn als auch das batteriebetriebene Motorrad fahren mit extrem hoher Geschwindigkeit. Wir messen ihre Masse in unserem System (als ruhenden Beobachter). Können wir bei beiden einen Anstieg der Masse feststellen? Nein, nur bei der Strassenbahn!

Denn die Masse eines Objektes steigt nicht an, wenn ihre Geschwindigkeit steigt, sondern nur dann, wenn ihr *Energie hinzugefügt* wird. Die Strassenbahn wird über die Fahrleitung gespeist, das Motorrad jedoch über die Batterie, die es selbst mitführt. Die Strassenbahn erhält also (vom Kraftwerk) *zusätzliche* Energie, die sich in einer Massenzunahme äußert (und einer Massen*abnahme* beim Kraftwerk!). Das Motorrad und seine Batterie sind ein abgeschlossenes System: Der Massengewinn des Motorrads wird durch einen entsprechenden Massenverlust der Batterie kompensiert. Es gibt also Netto keine Änderung! *(sofern wir vereinfachend annehmen, dass keine Energie nach außen dringt, etwa als Wärme des Elektromotors.)*

Aufgabe 6:
a) Stellen Sie sich ein batteriebetriebenes Katapult vor, das Steine senkrecht hochwerfen kann. Im Moment des Abwurfs bekommt der Stein eine hohe Geschwindigkeit. Nimmt seine Masse zu? Wenn nein, wieso nicht? Wenn ja, woher kommt die Energie, die der zugenommenen Masse entspricht?

b) Ein Jogger beginnt in einer flachen Ebene (also nicht bergabwärts!) zu rennen, und beschleunigt auf beinahe Lichtgeschwindigkeit. Wie sieht es in seinem Fall aus? Woher bezieht er seine Energie?

c) Mit einer Hebebühne wurde ein Stein auf einen Turm gebracht. Der Stein wird dann fallengelassen, wodurch seine Geschwindigkeit zunimmt. Wie sieht es nun in diesem Fall aus? *Tipp: Betrachten Sie genau die Energien, die der Stein auf dem Turm und kurz vor dem Aufprall hat!*

6.7 Die Elektronen und ihre Volts

In der Elektrostatik werden Sie lernen, dass die elektrische Spannung U_{AB} zwischen zwei Punkten A und B gleich der Verschiebungsarbeit W_{BA} eines Teilchens dividiert durch die Ladung q dieses Teilchens ist:

$$U_{AB} = \frac{W_{BA}}{q}.$$

Dabei ist W_{BA} die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um das geladene Teilchen von B nach A zu verschieben (und die Spannung U_{AB} zu überwinden). Wir können diese Definition nun umkehren und folgendermassen betrachten: $U_{AB} \cdot q$ ist die Energie, die ein geladenes Teilchen (mit der Ladung q) aufnimmt, nachdem es die Spannung U_{AB} durchlaufen hat.
Daraus definiert man die Energieeinheit *Elektronenvolt* folgendermaßen:

Ein Elektronenvolt ist die Energie, die ein einfach geladenes Teilchen (d. h. mit einer Elementarladung e = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, z. B. ein Elektron) besitzt, nachdem es eine Spannung von 1 Volt durchlaufen hat.
Diese Energieeinheit Elektronenvolt (Abkürzung: 1 eV) berechnet sich zu

$$E = e \cdot U = (1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}) \cdot 1\,\mathrm{V}, \quad \text{also} \quad \mathbf{1\,eV = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,J}$$

Dass das Elektronenvolt eine sehr nützliche Einheit ist, sieht man an den folgenden zwei Beispielen:

Welche Energie gewinnt ein Elektron beim Durchlaufen einer Spannung von 1000 Volt?

$$E = 1\mathrm{e} \cdot 1000\,\mathrm{V} = 1000\,\mathrm{eV} = 1\,\mathrm{keV}$$

Welche Gegenspannung muss man anlegen, um ein Elektron, das eine kinetische Energie von 500 eV besitzt, abzubremsen?

Wir wollen die kinetische Energie in potentielle Energie umwandeln, und benötigen also 500 eV an Energie, um die Elektronen abzubremsen. Für ein Elektron (mit Ladung e) entspricht das also gerade 500 V Gegenspannung!

Somit lässt es sich sehr einfach rechnen: Beim Durchlaufen einer Spannung von x Volt gewinnt ein Elektron (oder allgemein ein Teilchen mit Ladung e) die Energie von x Elektronenvolt (eV). Je nach Richtung des Elektrons handelt es sich um potentielle oder um kinetische Energie. Im zweiten Fall entspricht diese Energie auch der Massenzunahme des Elektrons. Aus diesem Grunde werden in der Teilchenphysik die Massen der Teilchen in Elektronenvolt angegeben. Die zusätzliche Masse bzw. Energie des Elektrons kommt dabei aus der Spannungsquelle.

Aufgabe 7:
a) Sie wollen ein Elektron derart beschleunigen, sodass es eine kinetische Energie von $8{,}01 \cdot 10^{-13}$ J gewinnt. Welche Spannung müssen Sie anlegen?

b) Ein ruhendes Proton wurde in einer Spannung von 5000 Volt beschleunigt. Wie groß ist seine Massenzunahme (in eV ausgedrückt)?

Die Massen*zunahme* eines beschleunigten Objekts entspricht der Energie, die dem Objekt *zugeführt* wird:

$$E = (m_{rel} - m_0) \cdot c^2$$

Diese Energie gewinnen Teilchen mit der elektrischen Ladung *q* beim Durchlaufen einer Spannung *U:*

$$q \cdot U \;=\; (m_{rel} - m_0) \cdot c^2 = (\gamma - 1)\, m_0\, c^2$$

Definition: Ein Elektronenvolt ist die (potentielle oder kinetische) Energie, die ein Teilchen mit der Elementarladung *e* beim Durchlaufen einer Spannung von einem Volt gewinnt.

6.8 Die „Unerreichbarkeit" der Lichtgeschwindigkeit

Je mehr sich ein massereicher Körper der Lichtgeschwindigkeit nähert, desto „träger" wird seine Masse, desto größer wird also der *Widerstand*, seine Geschwindigkeit noch weiter zu erhöhen. Das äußert sich in der erhöhten relativistischen Masse – die zu Recht auch *träge* Masse genannt wird – und im Prinzip eine Beschleunigung auf Lichtgeschwindigkeit „verunmöglicht". Umgekehrt lässt sich folgern, dass Teilchen, die mit Lichtgeschwindigkeit unterwegs sind, die Ruhemasse 0 besitzen müssen (z. B. Photonen).